

1 Il sistema temperato equabile

Il *sistema temperato equabile* nasce per risolvere alcuni problemi della [scala pitagorica](#) e di quella [naturale](#), in particolare quelli legati al cambiamento della tonalità.

Esso fu descritto da Aristosseno di Taranto intorno al 320 a.C. e poi ripreso dal discepolo di Zarlino e padre di Galileo, Vincenzo Galilei (1520-1591), dai matematici Simone Stevino (1548-1620) e Giovanni Battista Benedetti (1530-1620). La soluzione di tale sistema fu quella di dividere la scala¹ in n parti uguali.

La scala prodotta secondo il temperamento equabile si ottiene dividendo l'ottava² in dodici parti uguali:

$$\frac{Do\#_3}{Do_3} = \frac{Re_3}{Do\#_3} = \dots = \frac{Do_4}{Si_3} = k$$

Poichè l'ottava è rappresentata dal rapporto 2 : 1, l'intervallo più piccolo (k), detto *semitono temperato* è pari a:

$$\begin{aligned} \frac{Do_4}{Do_3} &= k^{12} \Rightarrow k^{12} = 2 \\ \Rightarrow k &= \sqrt[12]{2} = 1.059463094\dots \simeq 1.06 \end{aligned} \quad (1)$$

cioè un numero irrazionale algebrico³, che corrisponde esattamente a 100 cent⁴.

Il semitono temperato risulta essere una via di mezzo fra quello diatonico e quello cromatico della scala naturale, infatti:

$$\frac{16}{15} \simeq 1.067 \quad \frac{25}{24} \simeq 1.042$$

Invece il *tono temperato*:

$$\sqrt[12]{2} \cdot \sqrt[12]{2} \simeq 1.1224 \quad (2)$$

risulta essere molto più vicino al tono maggiore naturale che a quello minore, infatti:

$$\frac{9}{8} = 1.125 \quad \frac{10}{9} \simeq 1.111$$

Nota	numero MIDI	Rapporto	Frequenza (Hz)	Cent
Do	60	1 : 1	261.6	0
Do# o Reb	61	$\sqrt[12]{2}$	277.2	100
Re	62	$\sqrt[12]{2^2}$	293.7	200
Re# o Mi \flat	63	$\sqrt[12]{2^3}$	311.1	300
Mi	64	$\sqrt[12]{2^4}$	329.6	400
Fa	65	$\sqrt[12]{2^5}$	349.2	500
Fa# o Sol \flat	66	$\sqrt[12]{2^6}$	370.0	600
Sol	67	$\sqrt[12]{2^7}$	390.0	700
Sol# o La \flat	68	$\sqrt[12]{2^8}$	415.3	800
La	69	$\sqrt[12]{2^9}$	440.0	900
La# o Si \flat	70	$\sqrt[12]{2^{10}}$	466.2	1000
Si	71	$\sqrt[12]{2^{11}}$	493.9	1100
Do	72	$\sqrt[12]{2^{12}}$	523.3	1200

¹La scala è una successione di un dato numero di suoni, il cui numero varia a seconda della scala considerata. Per maggiori approfondimenti potete consultare [teoria musicale: scale e intervalli](#).

²Il termine *ottava* indica la distanza tra 8 suoni. Si tratta di un particolare tipo di intervallo. Per maggiori approfondimenti potete consultare [teoria musicale: scale e intervalli](#).

³I numeri irrazionali sono numeri reali che, a differenza di quelli razionali, non possono essere espressi come rapporto $\frac{a}{b}$ dove a e b sono due numeri interi. I numeri irrazionali a loro volta si distinguono in: irrazionali algebrici e irrazionali trascendenti. I primi sono numeri irrazionali che sono soluzioni di un'equazione polinomiale a coefficienti interi (ad esempio $\sqrt{2}$), quelli trascendenti invece non lo sono (ad esempio π).

⁴Il *cent* è un'unità di misura degli intervalli musicali, 1 cent corrisponde a $\frac{1}{100}$ di semitono. Per maggiori informazioni potete consultare [la scala logaritmica](#).

Tale sistema, al momento della disputa sulla sua adozione, trovò le critiche sia dei teorici che dei musicisti. Dal punto di vista dei teorici veniva accusato di allontanarsi dalla semplicità dei rapporti di frequenza pitagorici. Dal punto di vista dei musicisti veniva accusato di andare a discapito dell'armonia, alterando la consonanza naturale degli intervalli di quinta, quarta e terza, e d'introdurre un'eccessiva meccanicità facendo perdere i colori particolari propri di ciascuna tonalità.

Malgrado l'apparente semplicità della soluzione, quindi, l'approdo a tale tipo di temperamento fu un processo storicamente complesso e graduale. Il vantaggio del temperamento equabile di modulare divenne un valore solo con l'affermarsi dell'armonia tonale.

1.1 Il passaggio al temperamento equabile: il temperamento mesotonico

Uno dei primi passi verso il sistema temperato equabile è stato ad opera di Vincenzo Galilei (1520-1591), padre di Galileo, precursore della musica barocca e discepolo di Zarlino. Egli propose di modificare la scala naturale adottando un tono costante ma razionale, pari a:

$$\frac{18}{17} \simeq 1.058823 \simeq \sqrt[12]{2} \quad (3)$$

Agli inizi del '500 fu proposto un altro sistema, noto come *temperamento mesotonico*, che si basava su un unico intervallo di tono pari a $\frac{\sqrt{5}}{2}$ in modo che l'intervallo di terza fosse uguale a quello della scala naturale:

$$\frac{Mi}{Do} = \frac{Re}{Do} \cdot \frac{Mi}{Re} = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{4}$$

Mentre nella scala pitagorica il Mi_5 , come visto nei ??problemi della scala pitagorica, non corrisponde al quinto armonico del Do_3 , quella mesotonica presenta tale corrispondenza che conserva dalla scala naturale. Da esso si ricava l'intervallo di quinta:

$$\sqrt[4]{5} \simeq 1.495 < \frac{3}{2} \quad (4)$$

che quindi risulta essere non più "giusta" ma corretta (senza tuttavia comprometterne eccessivamente la consonanza) per far sì che siano le terze maggiori ad avere la loro intonazione naturale. Quindi tale temperamento proponeva di eliminare il *comma sintonico*⁵ "distribuendolo" fra i vari gradi della scala.

Tale temperamento si realizza sfruttando il valor medio fra i due toni della scala naturale:

$$\frac{204 + 182}{2} = 193 \text{ cent}$$

Ricordando che l'ottava è composta da 1200 cent:

$$195 \cdot 5 = 965 \\ 1200 - 965 = 235 \quad \Rightarrow \quad 235 : 2 = 117.5$$

quindi la scala mesotonica è costituita da 5 toni interi tutti di 193 cent e da due semitoni entrambi di 117.5 cent. Ma due semitoni sommati tra loro non danno un tono intero, come nella scala pitagorica. Ciò determina, con alcune eccezioni, una notevole differenza di frequenza fra coppie di note enarmoniche.

⁵Col termine *comma sintonico* si intende la differenza fra tono maggiore e tono minore della ??scala naturale.

La seguente tabella mostra la scala diatonica del temperamento mesotonico:

Grado	Rapporto	Cents
I	1	0
II	$\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1.118$	193
III	$\frac{5}{4} = 1.25$	386
IV	$2\sqrt[4]{\frac{125}{5}} \simeq 1.337$	503
V	$\sqrt[4]{5} \simeq 1.495$	503
VI	$\frac{\sqrt[4]{5}}{2} \simeq 1.6719$	889.7
VII	$5\sqrt[4]{\frac{125}{4}} \simeq 1.869$	1082.8
VIII	2	1200

La soluzione mesotonica non ebbe però molta fortuna in quanto, pur essendo "meno irrazionale" dell'equabile (si usano radicali di indice 4 anziché 12), non eliminava le differenze tra i due semitoni, ed inoltre resta il comma pitagorico, quindi il circolo delle quinte risulta essere una spirale anche in questo caso.

Nel 1691 Werkmeister trovò un compromesso acustico, da lui stesso ribattezzato *buon temperamento*, componendo 5 quinte mesotoniche e 7 quinte pitagoriche:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{5} &= \frac{\text{Sol}}{\text{Do}} = \frac{\text{Re}}{\text{Sol}} = \frac{\text{La}}{\text{Re}} = \frac{\text{Fa}\#}{\text{Si}} \\ \frac{3}{2} &= \frac{\text{Si}\flat}{\text{Mi}\flat} = \frac{\text{Do}}{\text{Fa}} = \frac{\text{Mi}}{\text{La}} = \frac{\text{Si}}{\text{Mi}} = \frac{\text{Do}\#}{\text{Fa}\#} = \frac{\text{Sol}\#}{\text{Do}\#} \\ \sqrt[4]{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 &= 5\sqrt[4]{5} \left(\frac{3}{2}\right)^7 \simeq 127.75 \simeq 128 = 2^7 \end{aligned}$$

La piccola differenza tra il comma pitagorico e quello sintonico è detta *schisma*, e vale meno di 2 cent.

Una tale approssimazione era impossibile da realizzare con sole quinte pitagoriche o naturali:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \simeq 129.75 > 128 = 2^7$$

o con sole quinte mesotoniche:

$$(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125 < 128 = 2^7$$

Non si trattava, quindi, di un temperamento equabile rigoroso poiché l'ottava non risultava divisa esattamente in parti uguali, ma fu considerato un buon temperamento.

La svolta che Werckmeister diede alla musica tre secoli fa, prima dell'avvento definitivo del sistema equabile, fu epocale: riuscì a trovare un compromesso tra l'esigenza dei musicisti di intervalli "giusti" e quella dei matematici di intervalli "esatti" e irrazionali.

2 Confronti fra le diverse scale

Il sistema temperato equabile offre dei vantaggi, rispetto alla scala pitagorica e quella naturale, che sono legati ai motivi che hanno portato alla sua costruzione, cioè:

1. Esiste un unico intervallo di semitono e di tono, quest'ultimo diviso in due semitoni uguali.
2. Il *circolo delle quinte* si chiude dopo 12 quinte, pari a 7 ottave. Infatti, mentre con la scala pitagorica e quella naturale:

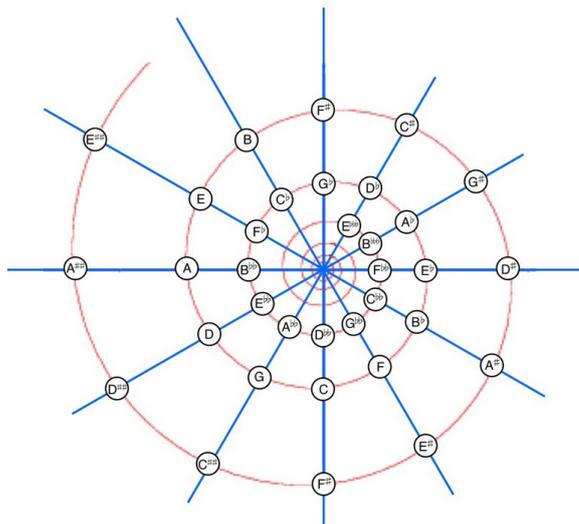
$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} \neq 2^7 \tag{5}$$

nel sistema temperato equabile:

$$(\sqrt[12]{27})^{12} = 2^7 \quad (6)$$

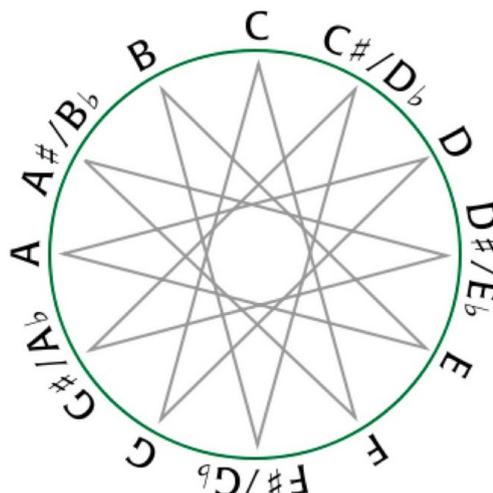
Pythagorean Tuning

Spiral of Perfect Fifths (3:2)



Equal-Temperament

Circle of Fifths ($12\sqrt[2]{2}$)⁷



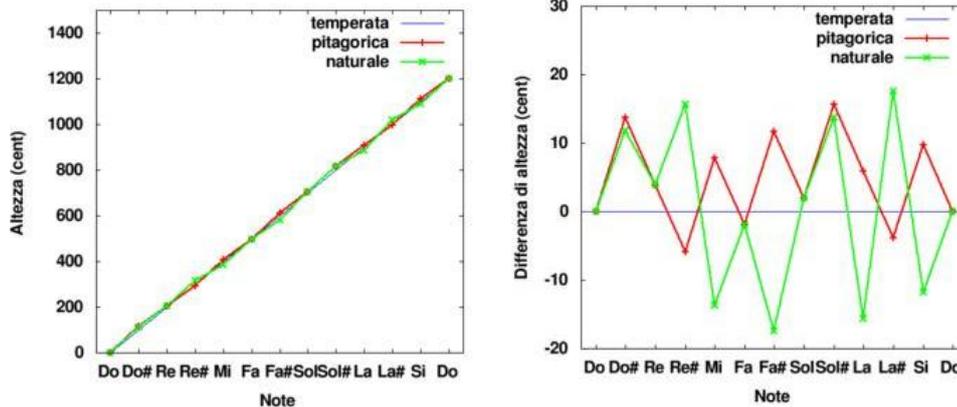
3. L'intonazione di un brano diventa indipendente dalla tonalità in cui esso è eseguito, quindi può essere trasposto in un'altra tonalità senza dover riaccordare gli strumenti e gli strumenti ad intonazione fissa suonano ugualmente bene in tutte le tonalità, nonostante si perdano le consonanze naturali di alcuni intervalli (come la quinta e la quarta).
4. Le note enarmoniche⁶ vengono a coincidere, semplificando la costruzione degli strumenti musicali, specie degli strumenti a tastiera come il pianoforte.

Il fatto che nel sistema temperato le note enarmoniche vengano a coincidere può anche essere uno svantaggio: mentre nella scala naturale esistevano sempre intervalli perfettamente consonanti, adottando il temperamento equabile questi intervalli non esistono, qualunque sia la tonalità in cui si suona. Dalla tabella⁷ seguente possiamo osservare le correzioni rispetto agli intervalli perfettamente consonanti:

Nota	Temperato	Naturale	Pitagorico	Differenza
Do	0.000	0.000	0.000	0.000
Do# o Re b	100.000	111.731	113.685	-11.731
Re	200.000	203.910	203.910	-3.910
Re# o Mi b	300.000	315.641	294.135	-15.641
Mi	400.000	386.314	407.820	+13.686
Fa	500.000	498.045	498.045	+1.955
Fa# o Sol b	600.000	590.224	611.730	+9.776
Sol	700.000	701.955	701.955	-1.955
Sol# o La b	800.000	813.686	815.640	-13.686
La	900.000	884.359	905.865	+15.641
La# o Si b	1000.000	1017.596	996.090	-17.596
Si	1100.000	1088.2689	1109.775	+11.731
Do	1200.000	1200.000	1200.000	0.000

⁶Le note enarmoniche sono note aventi diverso nome ma stesso suono. Per ulteriori approfondimenti potete consultare ??Teoria musicale: scale e intervalli.

⁷La differenza è stata calcolata fra la scala temperata e quella naturale



Le differenze sono minime, soprattutto per gli intervalli di quarta giusta (+1.955) e di quinta giusta (-1.955), che sono quelli a fondamento della consonanza. Le differenze principali si trovano per le terze minori che risultano calanti (-15.641) e quelle maggiori che risultano crescenti (+13.686) rispetto alle corrispettive naturali. Lo stesso problema si ha anche per la scala pitagorica, anche se in direzione opposta. Soprattutto per le terze maggiori che costituiscono, nei suoi composti, un armonico con un numero d'ordine relativamente basso (Mi_6 è contemporaneamente il quinto armonico di Do_4 e il quarto armonico di Mi_4), ciò può portare, come già spiegato a proposito della scala pitagorica, al fenomeno dei battimenti. Nella pratica musicale coloro che suonano strumenti ad intonazione variabile (es: archi, fiati) se accompagnati da uno strumento ad intonazione fissa (es: strumenti a tastiera) introducono in tempo reale al momento dell'esecuzione le necessarie correzioni per eliminare i battimenti.

Nei due grafici sottostanti vengono riassunti i valori della scala temperata, pitagorica e naturale: il primo riporta le altezze delle note delle tre scale (la scala temperata coincide con la diagonale), nel secondo sono evidenziate le differenze fra le altezze delle note, relativamente alla scala temperata rappresentata dall'asse x.

Riferimenti bibliografici

- [1] AA. VV., Enciclopedia della musica, *Le Garzantine*, Garzanti libri, gennaio 1999.
- [2] AA. VV., *Dizionario Enciclopedico della Musica e dei Musicisti*, Torino, Utet.
- [3] Fisica Onde Musica, (<http://fisicaondemusica.unimore.it/>).
- [4] S. Isola, *Temperamenti: matematica e teoria musicale*, (<http://www.unicam.it/>).