La scala logaritmica

Diritti riservati - Sonia Cannas e ”la natura delle cose”

2 aprile 2012

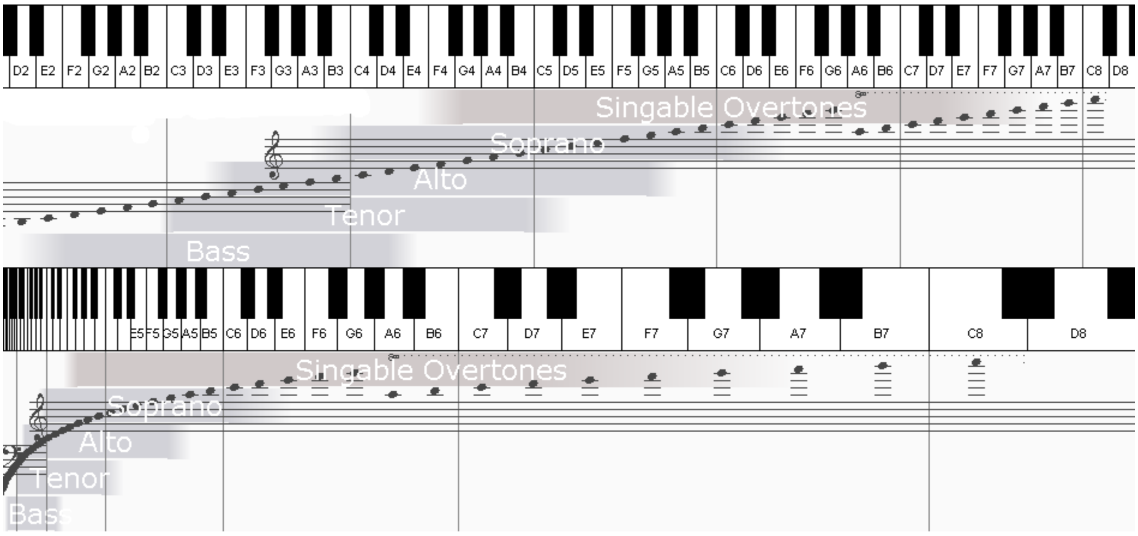
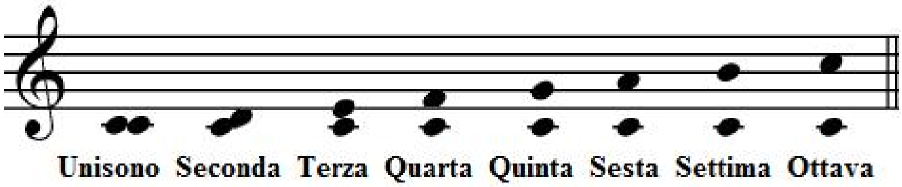


Figura 1: Tastiera in scala logaritmica e lineare. Autore: Carlo Andrea Rozzi. Tratto da http://fisicaondemusica.unimore.it/

La scala logaritmica

L'orecchio umano, se sufficientemente allenato, è in grado di individuare la differenza d'altezza fra due suoni, cioè la distanza tra due suoni, che in musica prende il nome di *intervallo*.

Il nome di un intervallo si determina contando le linee e gli spazi che separano le due note sul rigo musicale.



L'altezza è uno dei tre caratteri fisici del suono (gli altri sono il timbro e l'intensità), e da un punto di vista percettivo permette di distinguere un suono *acuto* da uno *grave*. Da un punto di vista fisico il suono è un'onda, e l'altezza indica la frequenza ν dell'onda.

Grazie agli studi sul funzionamento del nostro apparato uditivo, a partire dalla *teoria posizionale* (1863) di Helmholtz[1], è stato dimostrato che l'ampiezza percepita di un intervallo musicale non si basa sulle differenze delle frequenze fra i due suoni che lo compongono, ma sul loro rapporto. Quindi data una nota, per ottenerne un'altra basta moltiplicare o dividerne la frequenza per un dato numero a seconda che la nota sia più acuta o più grave. Quindi non percepiamo la differenza tra due frequenze ma la differenza fra i loro logaritmi. Infatti, applicando il logaritmo al rapporto fra due frequenze $\frac{\nu_2}{\nu_1}$:

$$\log \frac{\nu_2}{\nu_1} = \log \nu_2 - \log \nu_1$$

Ne consegue che la disposizione più naturale delle frequenze è quella in scala logaritmica.

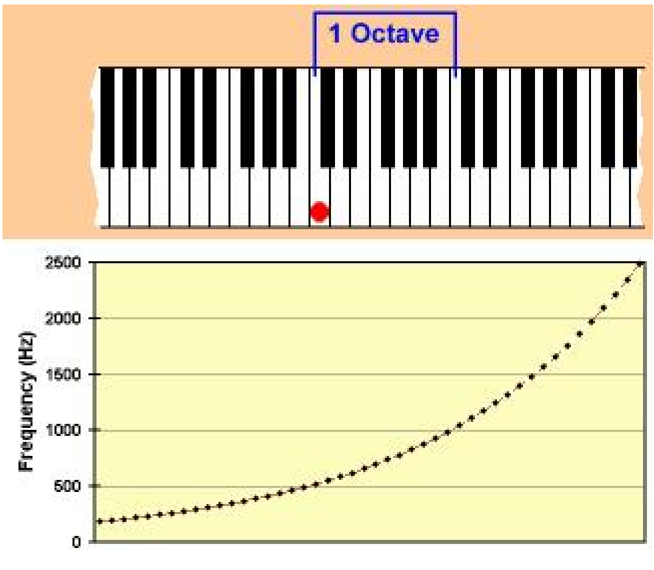


Figura 2: Il grafico nota-frequenza è una curva esponenziale (e l'esponenziale è la funzione inversa del logaritmo).

[1]Quando il timpano viene investito da un'onda trasforma le oscillazioni di pressione dell'onda in vibrazioni meccaniche. Tali vibrazioni arrivano fino alla coclea, che si trova nell'orecchio interno e ha la forma di una chicciola. Nel suo interno contiene un liquido che circonda la *membrana basilare*. Le vibrazioni determinano uno spostamento di tale liquido che causa una deformazione di tale membrana. Secondo la teoria posizionale la discriminazione delle altezze è dovuta al punto di massima deformazione della membrana basilare, e quindi alla posizione, lungo la membrana, delle cellule che vengono sollecitate. Conseguentemente a ciò gli intervalli vengono percepiti come rapporti di frequenze poiché per ogni tipo di intervallo la membrana riserva una regione di ampiezza costante.

In occidente il sistema musicale attualmente in uso è il temperamento equabile (di cui si vedranno maggiori approfondimenti in un prossimo articolo), la cui scala si ottiene dividendo l'ottava in dodici parti uguali. Quindi, supponendo di considerare l'ottava centrale del pianoforte Do$_3$-Do$_4$:

$$\frac{Do\#_3}{Do_3} = \frac{Re_3}{Do\#_3} = \cdots = \frac{Do_4}{Si_3} = k$$

Poichè l'ottava è rappresentata dal rapporto 2:1, l'intervallo più piccolo, detto *semitono temperato* è pari a:

$$2:1 = \frac{Do_4}{Do_3} = k^{12} \quad \Rightarrow \quad k^{12} = 2$$
$$\Rightarrow \quad k = \sqrt[12]{2} = 1.059463094... \simeq 1.06 \tag{1}$$

La base b del logaritmo viene scelta in modo che l'ottava abbia larghezza unitaria:

$$\log_b(2\nu : \nu) = \log_b 2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 2 \tag{2}$$

Usando i logaritmi, Eulero[2] riuscì a determinare il numero di semitoni distinti presenti tra due note. Supponiamo che le frequenze delle due note abbiano un rapporto $R = \frac{N_2}{N_1}$:

$$\left(\sqrt[12]{2}\right)^n = R \quad \Rightarrow \quad n \log_2\left(\sqrt[12]{2}\right) = \log_2 R$$
$$\Rightarrow \quad n = 12 \log_2 R \tag{3}$$

dove $n \in \mathbb{N}$ se le note appartengono al temperamento equabile in quanto R è una potenza intera di $\sqrt[12]{2}$.

Quindi il logaritmo (in base 2) di un intervallo musicale, considerato entro la scala temperata equabile, ci permette di determinare il numero di semitoni di cui esso è composto.

Ad esempio, per la quinta equabile si ha:

$$R = \sqrt[12]{2^7} \quad \Rightarrow \quad n = 12 \log_2 R = 12 \cdot \frac{7}{12} = 7 \tag{4}$$

Un sistema molto usato per misurare rapporti di frequenza è quello dei *centesimi*, introdotto intorno al 1875 dal matematico inglese Alexander Ellis (1814-1890). La formula per esprimere un qualsiasi intervallo $R = \frac{N_2}{N_1}$ tra due note in *cent* è la seguente:

$$n = 1200 \log_2 R \tag{5}$$

In questo modo il semitono equabile, il tono equabile, la quinta $R = 3:2$ e l'ottava $R = 2:1$ corrispondono rispettivamente a:

$$1200 \cdot \log_2 \sqrt[12]{2} = 100\,cent \tag{6}$$
$$1200 \cdot \log_2 \sqrt[6]{2} = 200\,cent \tag{7}$$
$$1200 \cdot \log_2 \left(\frac{3}{2}\right) = 701.955\,cent \tag{8}$$
$$1200 \cdot \log_2 2 = 1200\,cent \tag{9}$$

Viceversa, un intervallo di n centesimi corrisponde ad un rapporto di frequenze pari a:

$$R = 2^{\frac{n}{1200}} : 1 \tag{10}$$

Anche sfruttando i centesimi le distanze fra note successive non risultano più essere espresse dai rapporti tra le frequenze ma dalle loro *differenze* in cent:

$$1200 \log_2(N_1 N_2) = 1200(\log_2 N_2 - \log_2 N_1) = n_2 - n_1 \tag{11}$$

[2] Così come tanti altri matematici, anche Eulero mostrò interesse nei confronti della teoria musicale, ne sono un esempio: *Tentamen novae theoriae musicae ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae* (1739), *Exposition de quelques nouvelles vues mathématiques dans la théorie de la musique* (1760), *Conjecture de la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* (1764), *Tentamen de sono campanarum* (1764) e *De harmoniae veris principiis perspeculum musicum repraesentatis* (1774).

Riferimenti bibliografici

[1] AA. VV., Enciclopedia della musica, *Le Garzantine*, Garzanti libri, gennaio 1999.

[2] Andrea Saba, *Didattica - dispense di acustica*, (`http://www.andreasaba.com/DIdattica/acustica/dispensa2010.pdf`).

[3] N. Chiriano, *A ritmo di log. G.W. Leibniz e i "numeri dei rapporti"*, Alice & Bob, Centro Pristem Un. Bocconi - n. 17-18, mar-giu 2010.

[4] Fisica Onde Musica, (`http://fisicaondemusica.unimore.it/`).

[5] S. Isola, *Temperamenti: matematica e teoria musicale*, (`http://www.unicam.it/`).